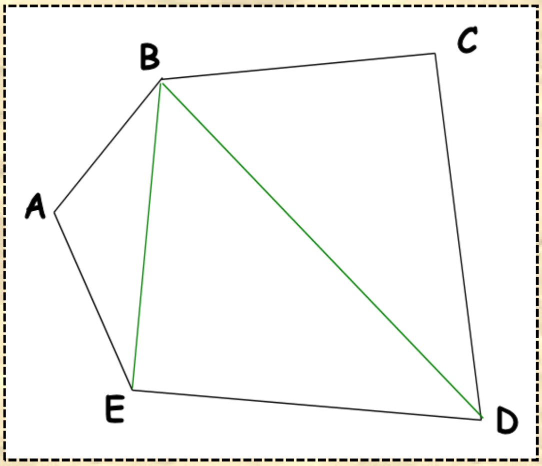
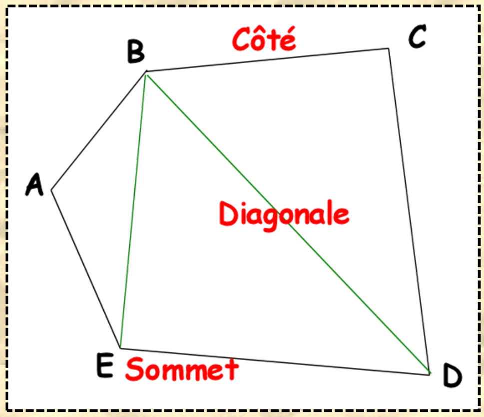
THEME 8

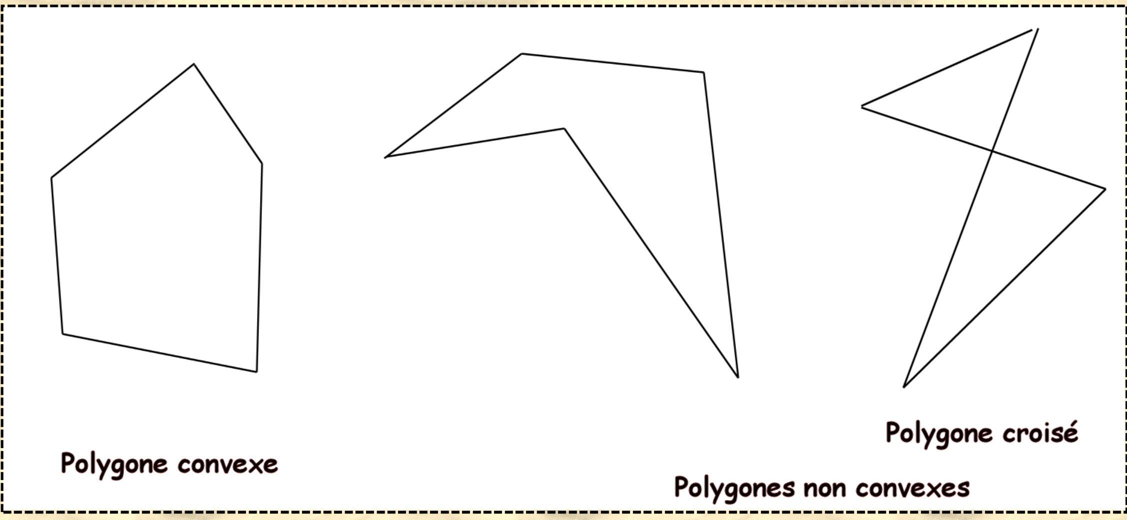
POLYGONES REGULIERS PRESENTATION

Un polygone (du grec *poly* , *plusieurs* et *gônia* , *angle*) est une ligne brisée fermée.



▷ Les points A, B , C , … s'appellent des sommets.
▷ Chaque segment qui constitue la ligne brisée ([AB] , [BC] , …) s'appelle un côté.
▷ Deux côtés consécutifs définissent un angle du polygone. Il y a autant d'angles que de sommets, et que de côtés.
▷ Une diagonale est un segment joignant deux sommets non consécutifs. ([BD] , [BE] sont des diagonales)





Remarque :

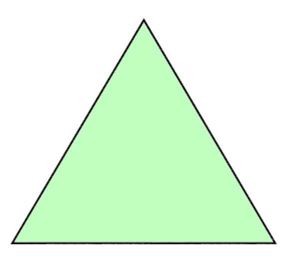
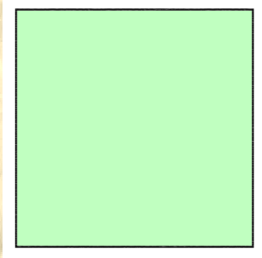
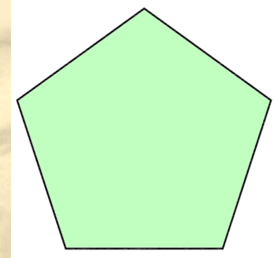
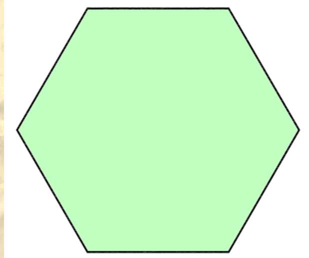
Un polygone a au moins 3 côtés (triangle).

▶ POLYGONE REGULIER

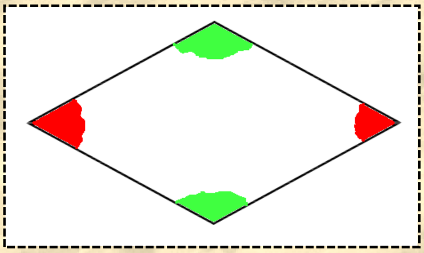
Définition :

Un polygone régulier est un polygone (convexe) dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont même mesure.

Exemples et contre-exemples :

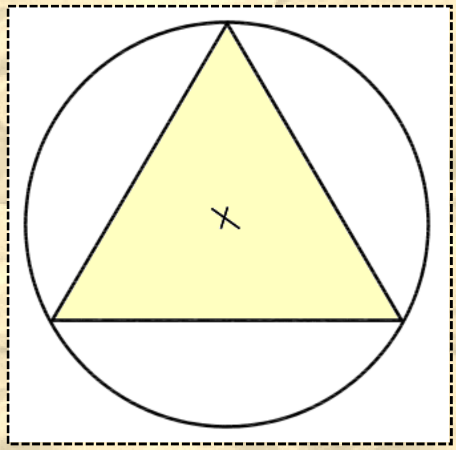
Nombre de cotés	3 **Triangle équilatéral**	4 **Carré**	5 **Pentagone**	6 **Hexagone**
Polygone régulier				

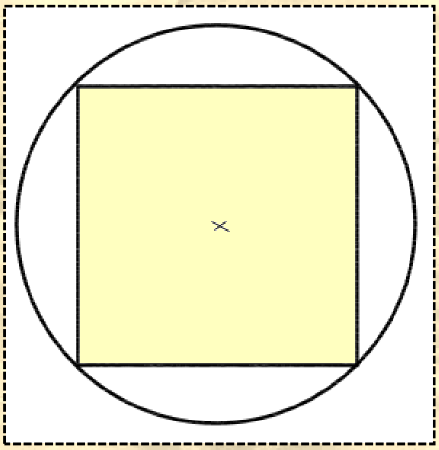
▶ Remarquons que <u>le losange</u> (non carré) <u>n'est pas un polygone régulier</u>. Les côtés ont même mesure, mais les angles sont différents (s'ils sont différents de 90°) .

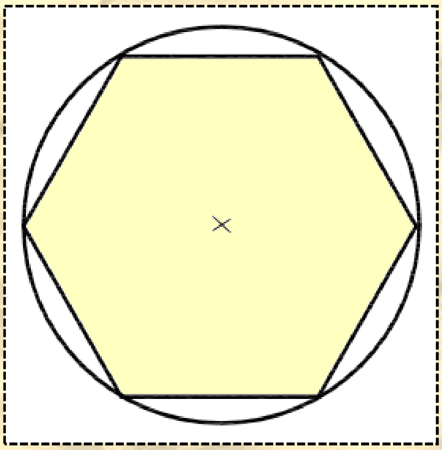


Propriété 1 :

<u>Tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle</u>. Le centre de ce cercle (circonscrit au polygone) est appelé le centre du polygone régulier et le diamètre (respectivement rayon) du cercle est appelé diamètre (respectivement rayon) du polygone régulier.





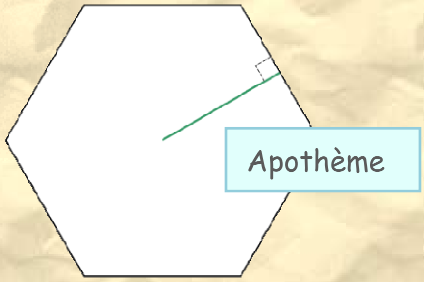


Cette propriété permet de définir de manière différente un polygone régulier :

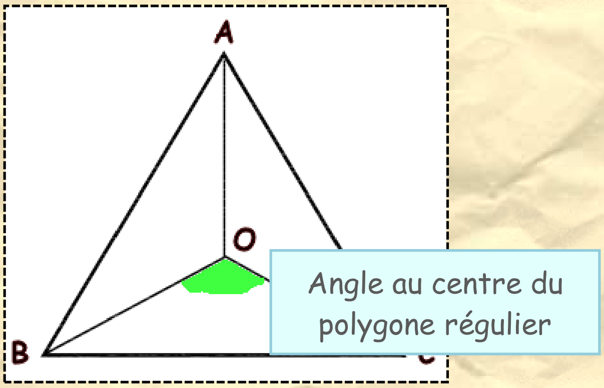
Si un polygone est inscriptible dans un cercle et si les longueurs de ses côtés sont égales, ce polygone est régulier.

Vocabulaire : Apothème

La distance entre le centre du polygone et chacun des côtés est l'apothème.



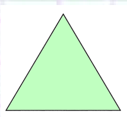
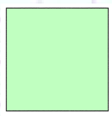
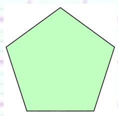
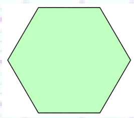
▶ *Propriété 1 :* Angle au centre d'un polygone régulier :



Le Pentagone, près de Washington, abrite le département de la Défense des États-Unis.

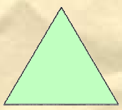
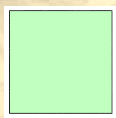
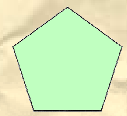
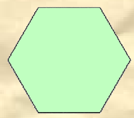
Exercice 1 :

a) Remplir le tableau suivant :

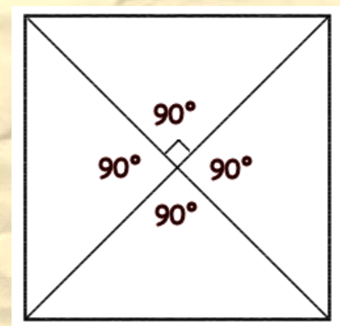
Nombre de cotés	3 **Triangle équilatéral**	4 **Carré**	5 **Pentagone**	6 **Hexagone**
Polygone régulier				
Angle au centre				

b) Exprimer en fonction de n, la valeur de l'angle au centre d'un polygone régulier à n côtés.

Les angles au centre d'un polygone régulier à n côtés mesurent $\frac{360}{n}$.

Nombre de cotés	3 **Triangle équilatéral**	4 **Carré**	5 **Pentagone**	6 **Hexagone**
Polygone régulier				
Angle au centre	$\frac{360}{3}=120$	$\frac{360}{4}=90$	$\frac{360}{5}=72$	$\frac{360}{6}=60$

Cas du carré :

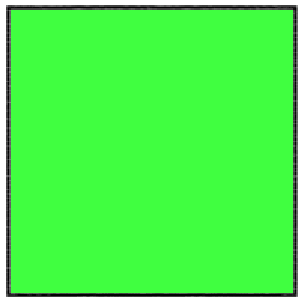


Exercice 2 :

Quelle est l'aire d'un carré dont la diagonale mesure 6 cm ?

Exercice 3 : Duplication du carré

Etant donné un carré, construire un carré d'aire double.



Ce problème, dont la résolution géométrique est relativement simple, offre un double intérêt historique : d'une part, il a servi de base à une démarche pédagogique célèbre racontée dans le Ménon de Platon (vers 400 av. J.-C.). D'autre part, il a poussé les mathématiciens à s'intéresser à un problème qui semblait similaire mais qui se révéla insoluble dans le cadre de la construction à la règle et au compas : la duplication du cube.
Dans le Ménon de Platon, Socrate cherche à prouver à Ménon que la science est en chacun de nous.
Il pose à un esclave le problème de la duplication du carré et va l'amener à trouver « seul » la solution du problème. La démarche de l'esclave suit une voie assez classique. Il propose de multiplier le côté par deux. Socrate l'amène à trouver qu'alors l'aire est multipliée par 4…. Après d'autres tentatives de multiplication, l'esclave arrive à une impasse : il ne peut trouver un nombre solution du problème. Socrate le guide alors vers la voie géométrique, il reproduit 3 carrés semblables au premier et trace une diagonale. L'esclave poursuit le raisonnement et construit enfin la solution au problème. D'après Socrate, l'esclave a retrouvé en lui une vérité qu'il possédait ; la démarche employée ressortit à la maïeutique. *D'après http://fr.wikipedia.org/*

Maïeutique (du grec *maieutiké*) art d'accoucher

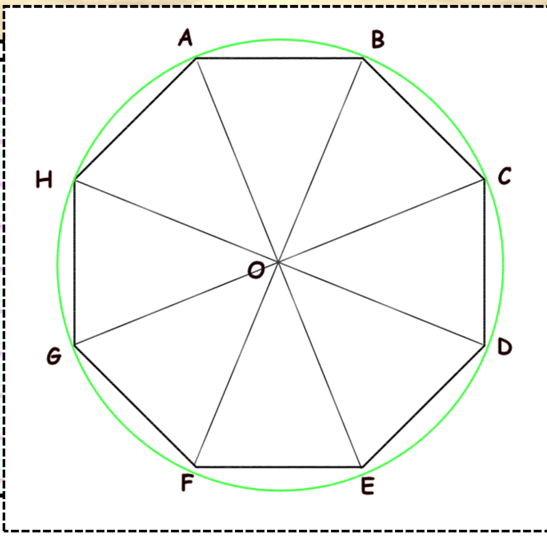
Remarque :

Considérons un polygone régulier de centre O à n côtés. Si l'on «tourne » autour de son centre O le polygone d'un angle égal à l'angle au centre, alors le polygone que nous obtenons coïncide avec le polygone initial.
Avec des termes un plus rigoureux, nous pouvons constater que le polygone est invariant (reste inchangé) par une rotation de centre O est d'angle $\dfrac{360}{n}$.

Vocabulaire : Noms des polygones (réguliers)

3	Triangle	4	Carré (Tétragone)	5	Pentagone
6	Hexagone	7	Heptagone	8	Octogone
9	Ennéagone	10	Décagone	11	Hendécagone
12	Dodécagone	20	Icosagone		

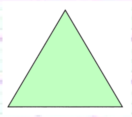
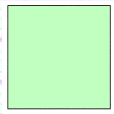
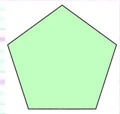
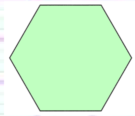
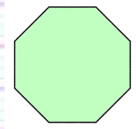
▶ Propriété 2 : Angle(s) du polygone régulier



Exercice 4 :

a)On considère un octogone (8 côtés) régulier ABCDEFGH de centre O.
Calculer l'angle $\widehat{ABO}$.
En déduire l'angle $\widehat{ABC}$.
Les 8 angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ABC}$ …., ont même mesure et s'appellent les angles du polygone régulier.

b) Remplir le tableau suivant :

Nombre de cotés	3 Triangle équilatéral	4 Carré	5 Pentagone	6 Hexagone	8 Octogone
Polygone régulier					
Angle au centre	120	90	72	60	45
Angle du polygone	60				

c) (Plus difficile) Montrer que, pour un polygone régulier à n côtés, l'angle a pour valeur :

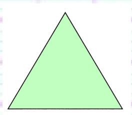
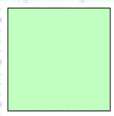
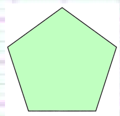
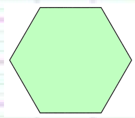
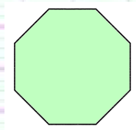
$$180-\frac{360}{n} \quad \text{ou} \quad (1-\frac{2}{n})\times 180 \quad \text{ou} \quad (n-2)\times\frac{180}{n}$$

▶ *Propriété 3 :* Somme des angles du polygone régulier

Exercice 5 :

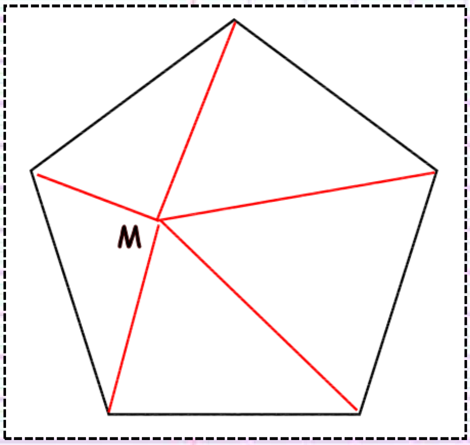
Connaissant les mesures des angles du polygone régulier, il est aisé de déterminer la somme totale des angles.

Compléter le tableau suivant :

Nombre de cotés	3 Triangle équilatéral	4 Carré	5 Pentagone	6 Hexagone	8 Octogone
Polygone régulier					
Angle au centre	120	90	72	60	45
Angle du polygone	60	90	108	120	135
Somme des angles	3×60				

Exercice 6 : Autre méthode de calcul

a)Considérons un pentagone régulier (5 côtés).



En partant d'un point M quelconque situé à l'intérieur du polygone, combien de triangles pouvons-nous former ?
Montrer alors que la somme des angles d'un pentagone est égale à :

$$180\times5-360 \quad \text{soit} \quad 540°$$

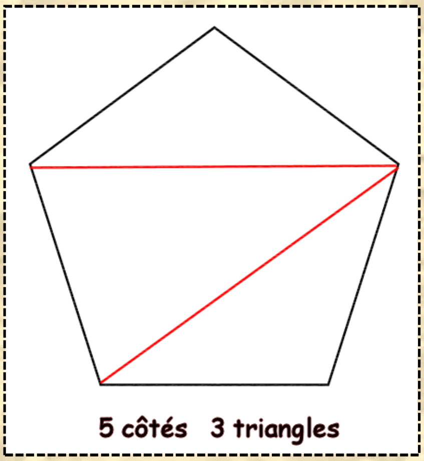
b) (Plus difficile !) Montrer, en utilisant cette méthode, que pour un polygone régulier à n côtés, la somme des angles est égale à

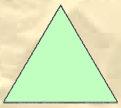
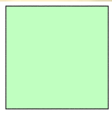
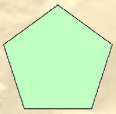
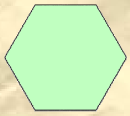
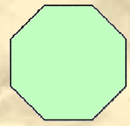
$$180\times n-360 \quad \text{ou} \quad 180\times(n-2)$$

Remarque :

Il existe d'autres méthodes pour calculer cette somme.
Nous pouvons démontrer qu'il est possible de découper un polygone à n côtés en (n – 2) triangles.
La somme des angles d'un triangle étant égale à 180°, la somme des angles du polygone sera égale à

$$(n-2)\times 180$$



Nombre de cotés	3 **Triangle équilatéral**	4 **Carré**	5 **Pentagone**	6 **Hexagone**	7 **Heptagone**	8 **Octogone**
Polygone régulier						
Angle au centre	120	90	72	60	$\frac{360}{7} \approx 51{,}43$	45
Angle du polygone	60	90	108	120	128,57	135
Somme des angles	180	360	540	720	900	1080

+ 180   + 180   + 180   + 180   + 180

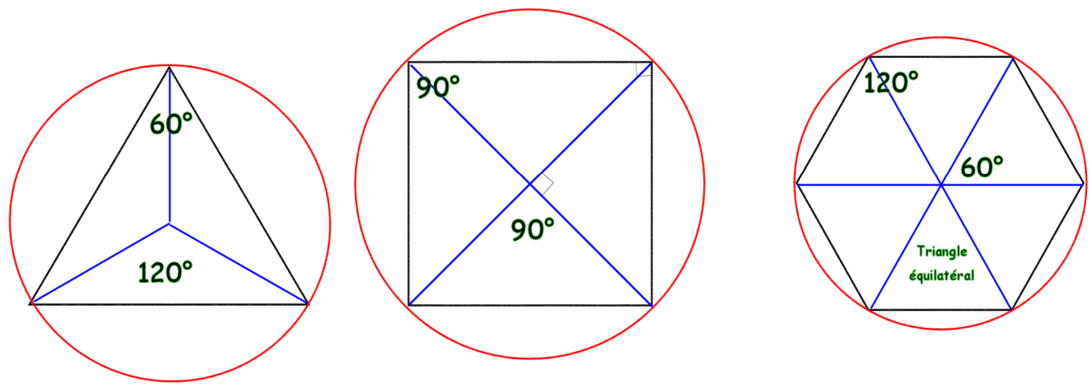
▶ RECAPITULATIF

▶ Un polygone régulier est un polygone (convexe) dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont même mesure.

▶ Tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle. Le centre de ce cercle (circonscrit au polygone) est appelé le centre du polygone régulier

▶ Les angles au centre d'un polygone régulier à n côtés mesurent $\frac{360}{n}$.

POLYGONES REGULIERS A CONNAITRE



TRIANGLE EQUILATERAL   CARRE   HEXAGONE

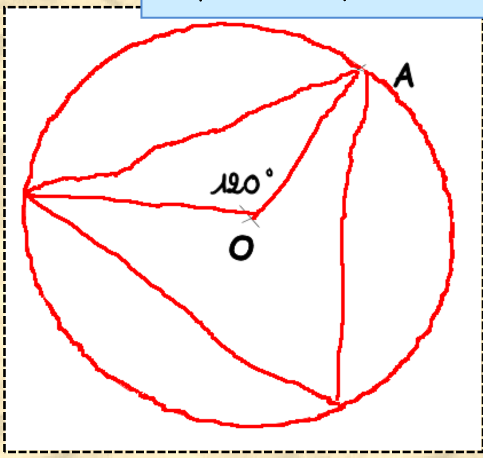
▶ CONSTRUCTION D'UN TRIANGLE EQUILATERAL, D'UN CARRE, D'UN HEXAGONE CONNAISSANT LE CENTRE ET UN SOMMET

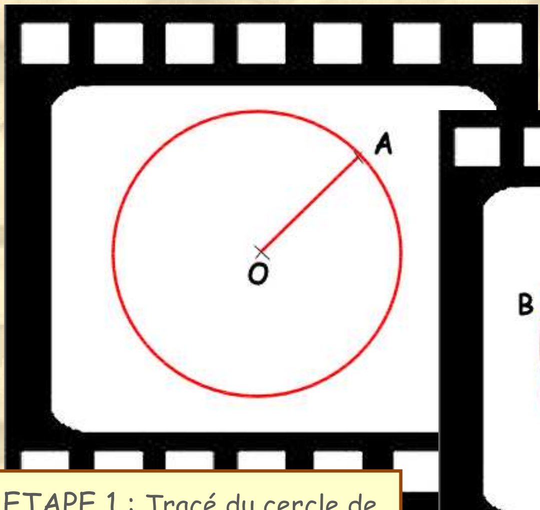
▶ CAS DU TRIANGLE EQUILATERAL :

SITUATION : Un point O (centre du polygone régulier) et un point A (un sommet du polygone)

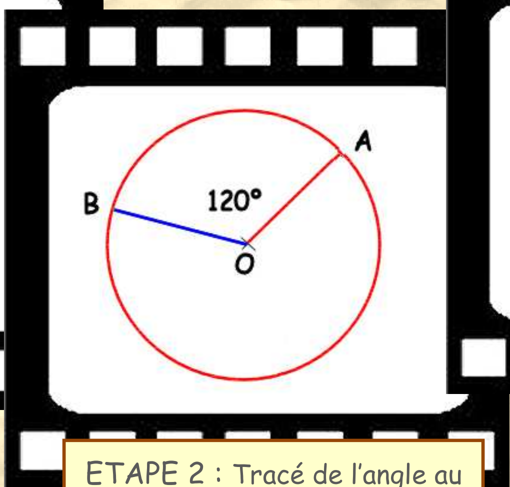
RECHERCHE

Les deux points étant donnés, supposons le triangle équilatéral tracé.
Le triangle équilatéral étant inscrit dans un cercle, les deux autres sommets sont sur le cercle de centre O passant par A
L'angle au centre d'un triangle équilatéral est de 120°, nous pouvons donc construire un point B tel que $\widehat{AOB} = 120°$

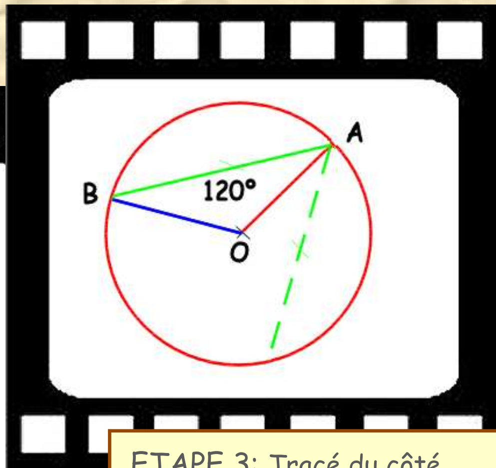




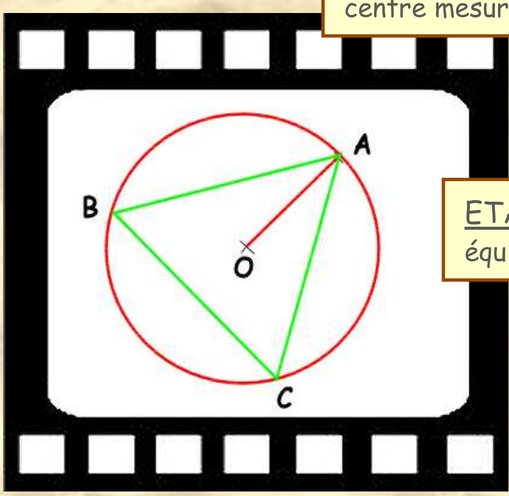
ETAPE 1 : Tracé du cercle de centre O passant par A



ETAPE 2 : Tracé de l'angle au centre mesurant 120°



ETAPE 3: Tracé du côté [AB]. A partir de A, tracé du côté [AC] de même longueur.



ETAPE 4 : Tracé du triangle équilatéral.

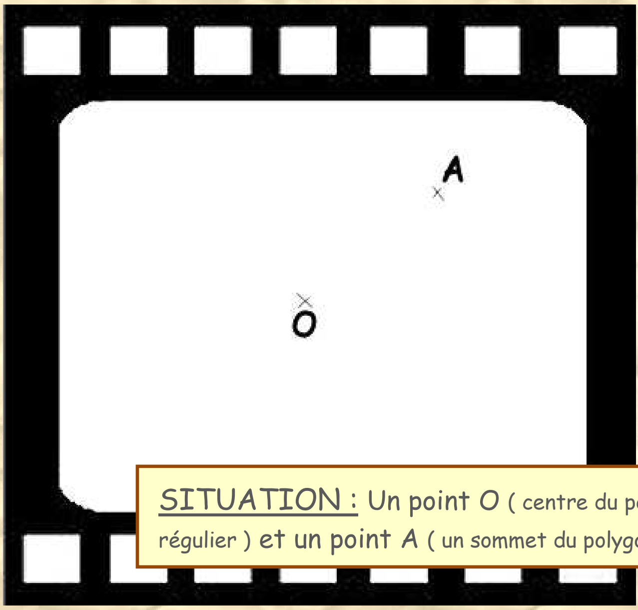
Une autre méthode sera donnée après la construction de l'hexagone.

▶ CAS DU CARRE :

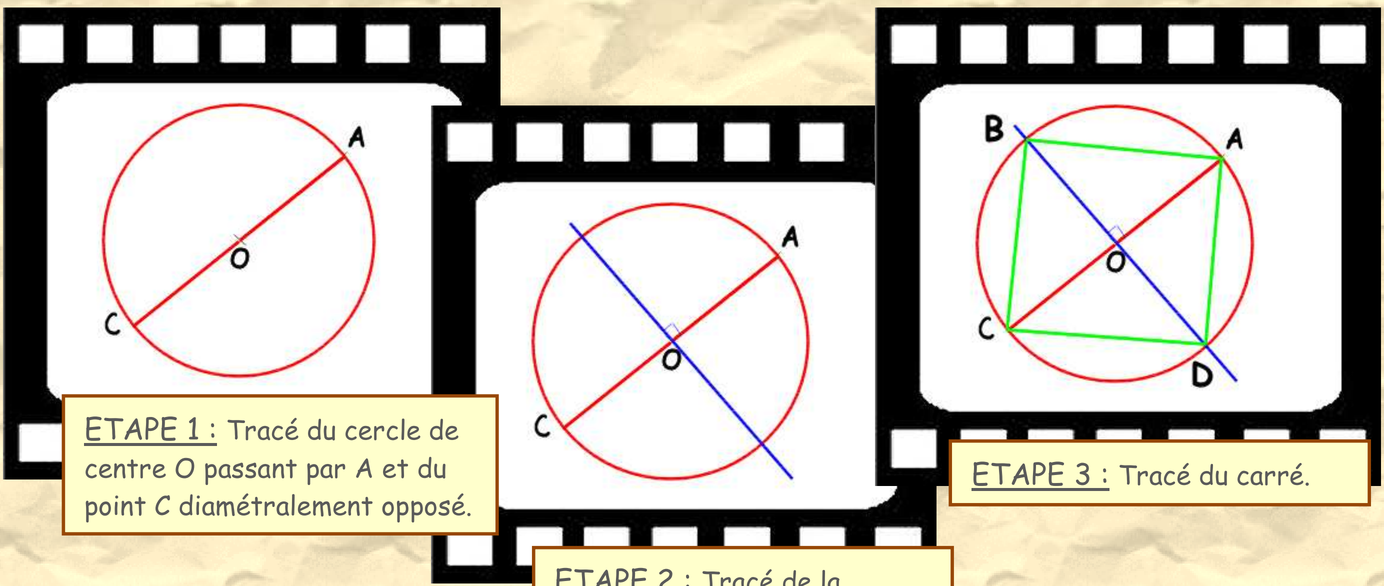
RECHERCHE

Nous pouvons opérer comme précédemment mais avec un angle au centre $\widehat{AOB}$ de 90°.

Nous pouvons également tracer le point C diamétralement opposé à A, et construire la médiatrice du segment [AC].



SITUATION : Un point O (centre du polygone régulier) et un point A (un sommet du polygone)

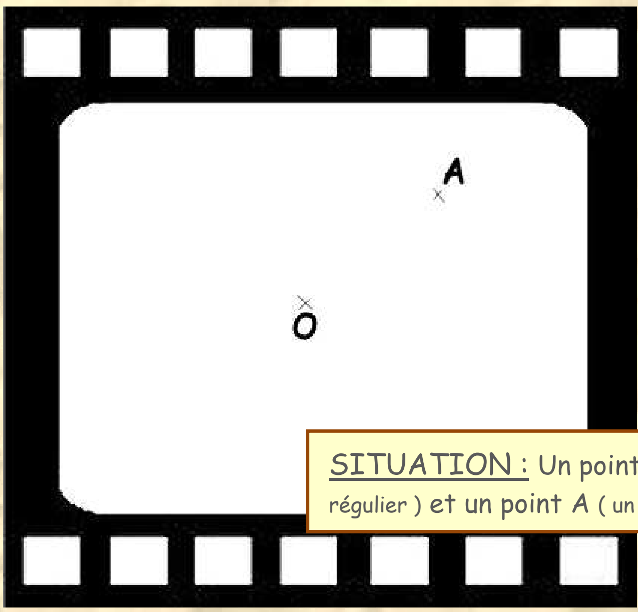


ETAPE 1 : Tracé du cercle de centre O passant par A et du point C diamétralement opposé.

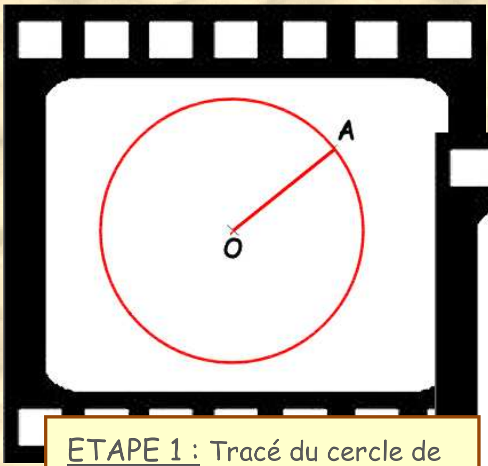
ETAPE 2 : Tracé de la médiatrice du segment [AC].

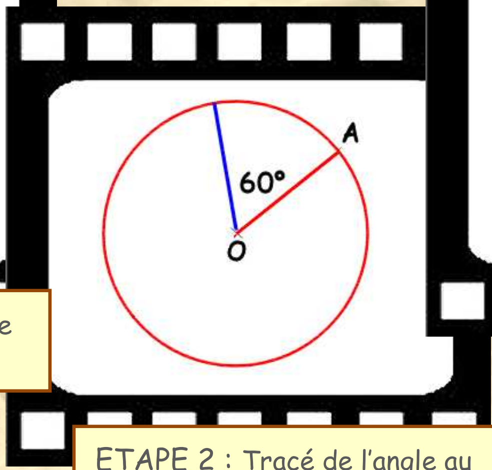
ETAPE 3 : Tracé du carré.

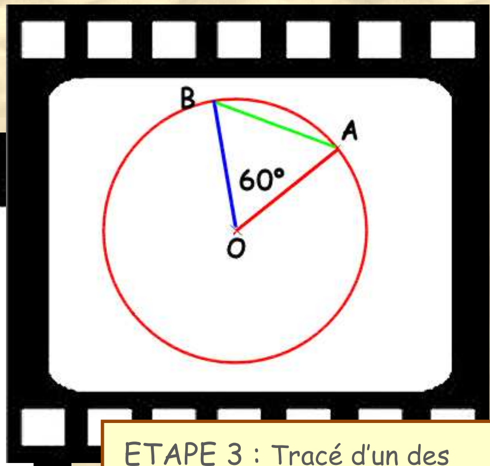
▶ CAS DE L'HEXAGONE :



SITUATION : Un point O (centre du polygone régulier) et un point A (un sommet du polygone)



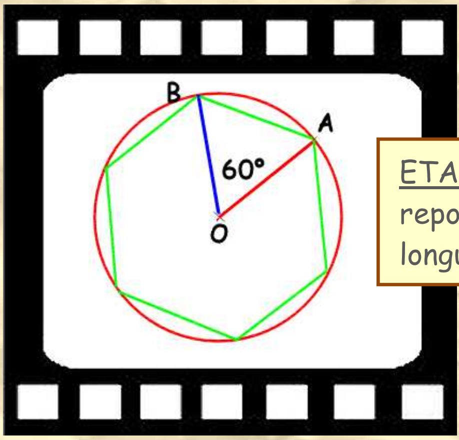




ETAPE 1 : Tracé du cercle de centre O passant par A.

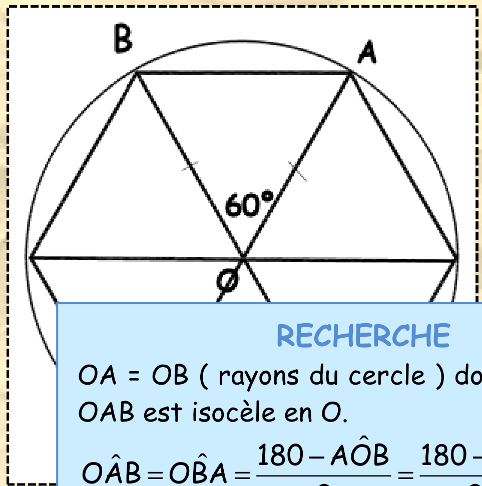
ETAPE 2 : Tracé de l'angle au centre de mesure 60°.

ETAPE 3 : Tracé d'un des côtés du polygone régulier.



ETAPE 4 : A l'aide du compas, on reporte les autres côtés (même longueur).

▶ CAS DE L'HEXAGONE : AUTRE METHODE



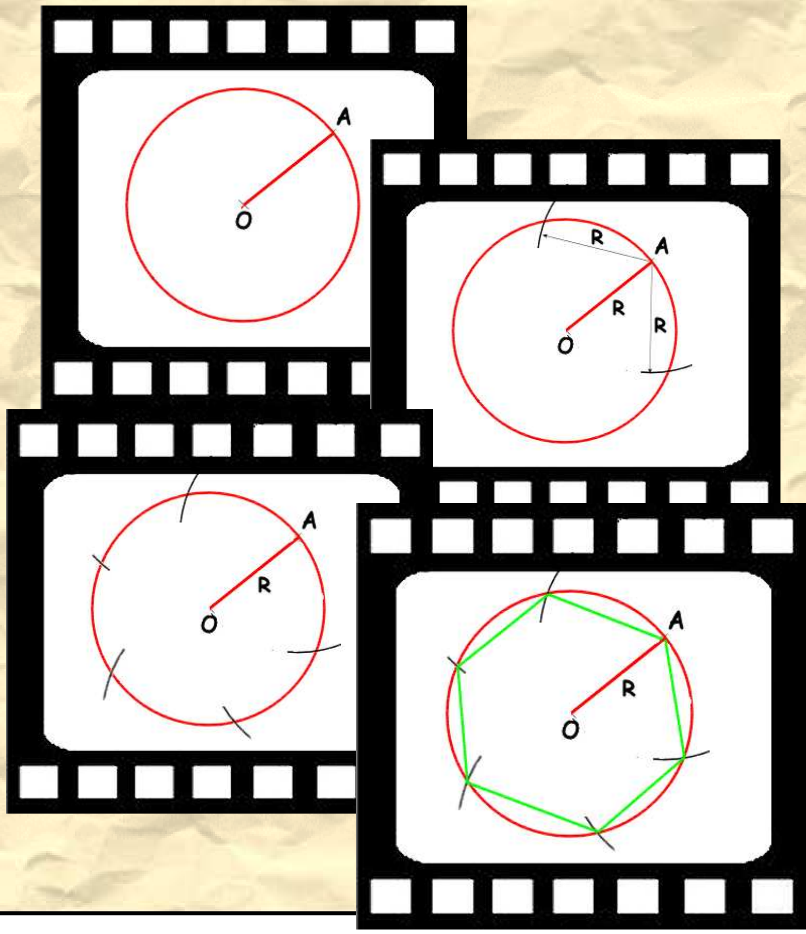
RECHERCHE

OA = OB (rayons du cercle) donc le triangle OAB est isocèle en O.

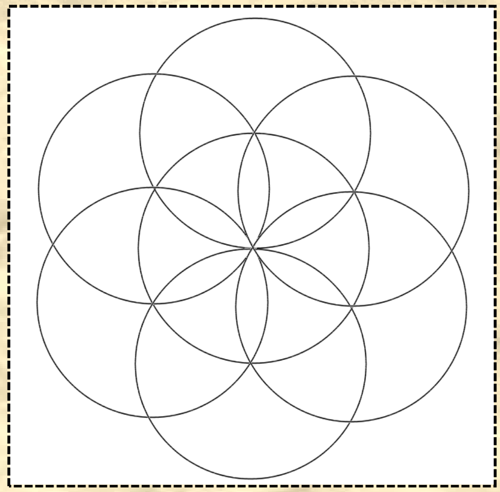
$$O\hat{A}B = O\hat{B}A = \frac{180 - A\hat{O}B}{2} = \frac{180-60}{2} = 60$$

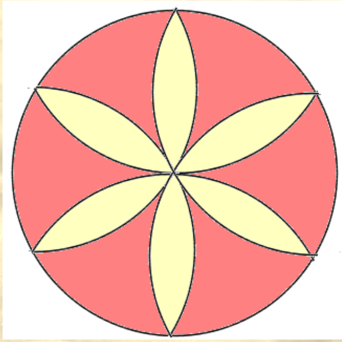
Le triangle OAB a trois angles de même mesure 60° , donc OAB est équilatéral.

Donc AB = OA = OB = R (rayon du cercle)



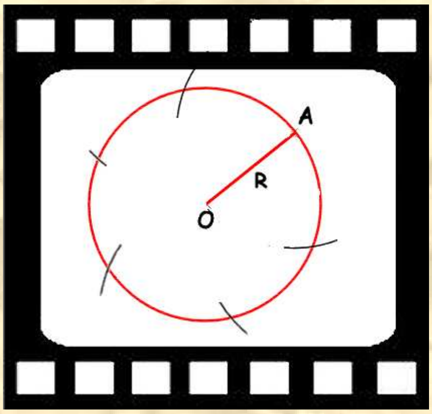
A partir de cette méthode de construction, il est possible de construire une rosace (simple) à 6 branches.

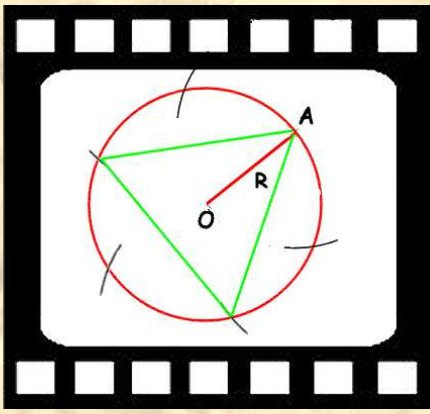




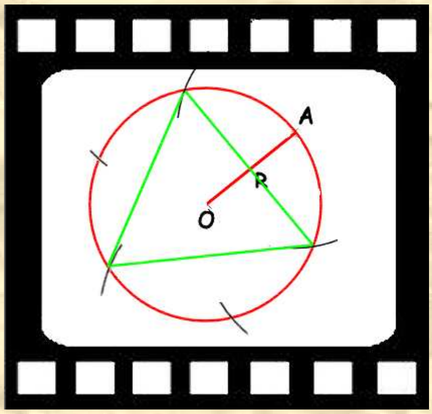
▶ CAS DU TRIANGLE EQUILATERAL : AUTRE METHODE

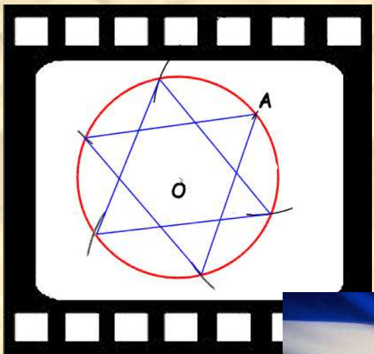
Il suffit de commencer à tracer un hexagone, puis de prendre, sur le cercle, un point sur deux :





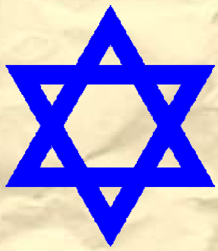
OU





Remarque :

En traçant les deux triangles équilatéraux, nous obtenons une étoile à 6 branches appelée encore hexagramme
Le symbole du judaïsme est l'étoile de David représenté par un hexagramme. Cette étoile se trouve sur le drapeau d'Israël .



A SUIVRE