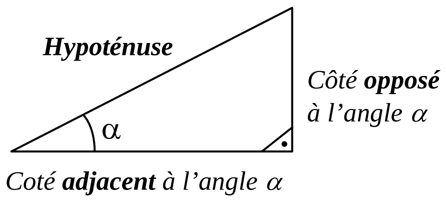
8. Trigonométrie dans le triangle rectangle

Définition : (Fonctions trigonométriques)
Soit le **triangle rectangle** ci-dessous, on définit les trois rapports suivants :



Le **sinus** de l'angle α : $\boxed{\sin\alpha = \frac{opp.}{hyp.}}$

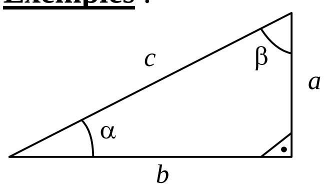
Le **cosinus** de l'angle α : $\boxed{\cos\alpha = \frac{adj.}{hyp.}}$

La **tangente** de l'angle α : $\boxed{\tan\alpha = \frac{opp.}{adj.}}$

Dans un triangle rectangle, la valeur de ces rapports ne dépend que de l'angle α .

Remarque : on écrit aussi *tg(α)* pour *tan(α)*

Exemples :



sin(α)= sin(β)=

cos(α) = cos(β)=

tan(α)= tan(β)=

Exercice :
Avec la calculatrice donner les valeurs suivantes : sin(30°) cos(30°) tg(30°)

Définition : (Fonctions trigonométriques réciproques)
On défini les fonctions *réciproques* :

- **L'arc sinus** est la fonction *réciproque* du sinus : $\sin(x) = y \Leftrightarrow \boxed{\arcsin(y) = x}$
- **L'arc cosinus** est la fonction *réciproque* du cosinus : $\cos(x) = y \Leftrightarrow \boxed{\arccos(y) = x}$
- **L'arc tangente** est la fonction *réciproque* de la tangente $\tan(x) = y \Leftrightarrow \boxed{\arctan(y) = x}$

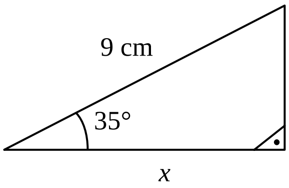
Remarque :
Pour $\arcsin(...)$, $\arccos(...)$, $\arctan(...)$, certaines calculatrices utilisent respectivement les notations $\boxed{SIN^{-1}, COS^{-1}, TAN^{-1}}$.

Exemple : Si $\sin(\alpha) = 0{,}8543$ alors : $\alpha = \arcsin(0{,}8543) \approx 58{,}7°$

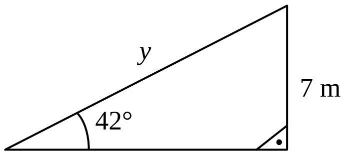
Exercice :
Résoudre les équations suivantes : sin(α) = 0,785 cos(β) = 0,123 tg(δ) = 1,8

Exemples :

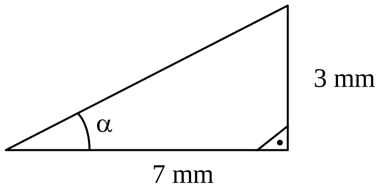
a)



b)



c)



Exercice 1 : Déterminez la valeur de chaque angle (arrondir à une décimale) :

$\sin(\alpha) = 0{,}8$ $\cos(\beta) = 0{,}4$ $tg(\chi) = 1{,}5$ $\sin(\delta) = 2/5$ $\cos(\varepsilon) = 1/5$ $tg(\phi) = 3/4$

Exercice 2 : Calculez la valeur des inconnues ci-dessous (arrondir à une décimale) :

$\sin(30°) = \frac{a}{8}$ $\cos(40°) = \frac{b}{7}$ $tg(60°) = \frac{c}{8}$

$\sin(30°) = \frac{8}{d}$ $\cos(40°) = \frac{7}{e}$ $tg(60°) = \frac{8}{f}$

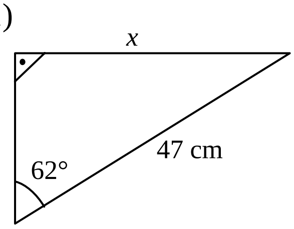
Exercice 3 : Complétez le tableau suivant :

α	Sin(α)	Cos(α)	Tg(α)
44°			
	0,5		
		0,5	
			1

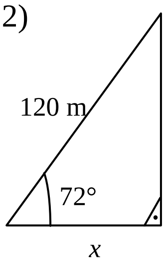
Exercice 4 :

Déterminer l’inconnue *x* dans les triangles suivants :

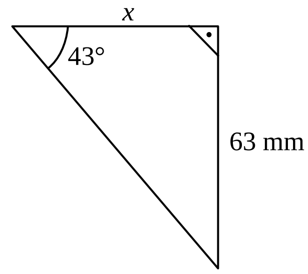
1)



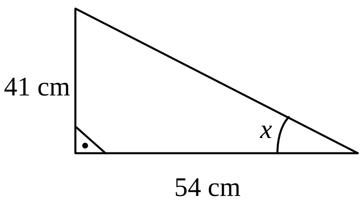
2)



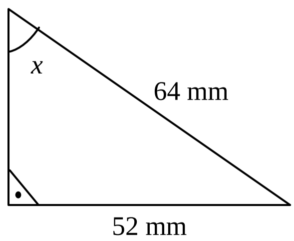
3)



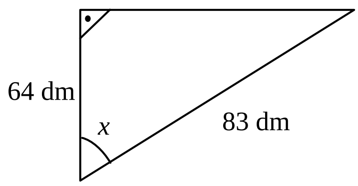
4)



5)



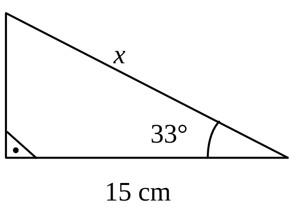
6)



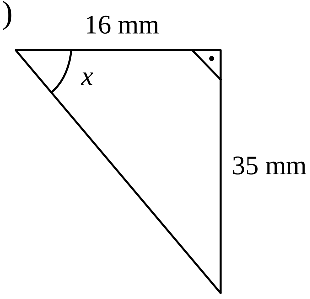
Exercice 5 :

Déterminer l’inconnue *x* dans les triangles suivants :

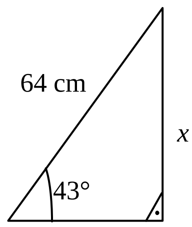
1)



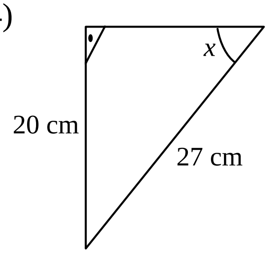
2)



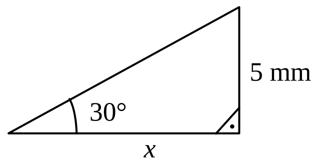
3)



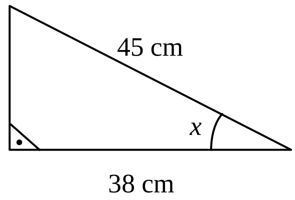
4)



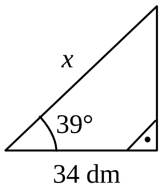
5)



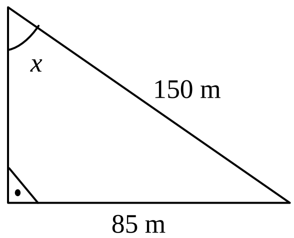
6)



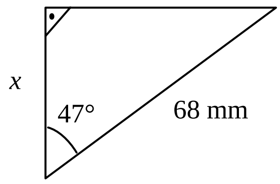
7)



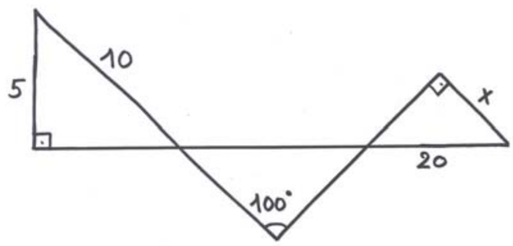
8)

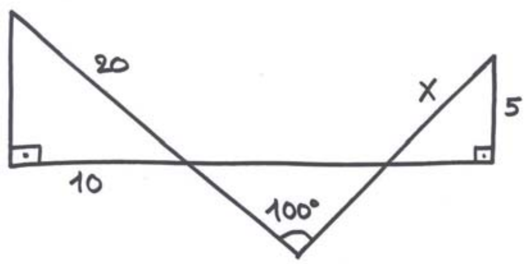


9)

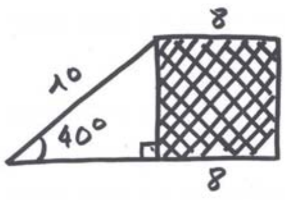


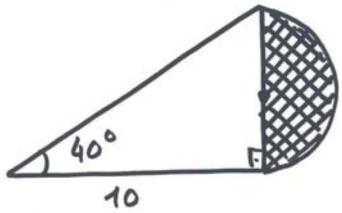
<u>Exercice 6</u> : Calculez la valeur de x pour chaque figure ci-dessous : (unités : le dm)

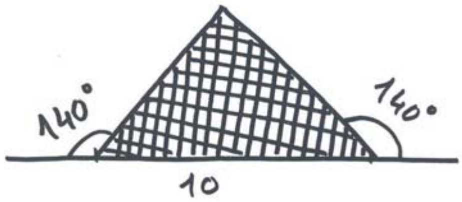


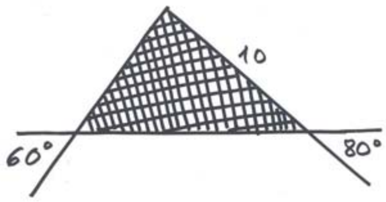


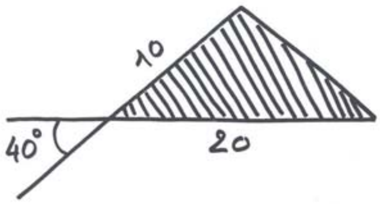
<u>Exercice 7</u> : Calculez l'aire de chaque surface ombrée (unités : le cm)





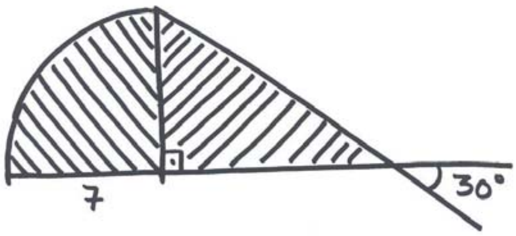






Carré inscrit dans un cercle
de 10 cm de rayon

Pentagone inscrit dans un cercle
de 10 cm de rayon



Exercice 8 : **Distance jusqu'au Mt Fuji**
Le sommet du Mt Fuji, au Japon, culmine à environ 3'800 m. Un étudiant en trigonométrie, à des kilomètres de là, remarque que l'angle d'élévation avec le sommet est de 30°. Calculer la distance de l'étudiant au point sur le sol à la verticale du sommet.

Exercice 9 : **Les blocs de Stonehenge**
Stonehenge, dans les plaines de Salisbury, en Angleterre, a été construit à l'aide de blocs de pierre solides pesant plus de 45'000 kg chacun. Pour soulever une seule de ces pierres, il a fallu 550 personnes qui poussaient la pierre le long d'une rampe inclinée d'un angle de 9°. Calculer sur quelle distance la pierre a été déplacée pour la dresser à une hauteur de 10 m.

Exercice 10 : **Hauteur d'un cerf-volant**
Une personne manœuvrant un cerf-volant tient le fil à 1 m au-dessus du sol. Le fil du cerf-volant est tendu et forme un angle de 60° avec l'horizontale. Calculer la hauteur du cerf-volant par rapport au sol, si on laisse dérouler 150 mètres de fil.

Exercice 11 : **Topographie**
Un géomètre situé à 15 mètres au-dessus du sol mesure l'angle de dépression d'un objet au sol à 68°. Calculer la distance entre l'objet et le point au sol à la verticale du géomètre.

Exercice 12 : **Atterrissage d'un avion**
Un pilote volant à une altitude de 1500 m désire aborder les numéros sur une piste d'atterrissage sous un angle de 10°. Calculer, à 100 m près, la distance entre l'avion et les numéros lorsqu'il amorce la descente.

Exercice 13 : **Altitude d'une fusée**
Une fusée est lancée à partir du niveau de la mer et parcourt 3'000 m suivant un angle constant de 75°. Calculer son altitude au mètre près.

Exercice 14 : **Décollage d'un avion**
Un avion décolle sous un angle de 10° et vole à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra l'avion pour atteindre une altitude de 4'500 m ?

Exercice 15 : **Construction d'une rampe**
Un constructeur désire ériger une rampe de 7,2 m de long qui atteigne une hauteur de 1,5 m par rapport au sol. Calculer l'angle que la rampe devrait faire avec l'horizontale.

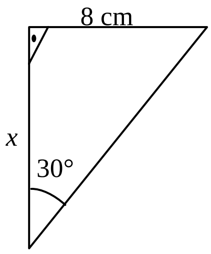
Exercice 16 : **Tour de télévision**
Un des ouvrages les plus hauts que l'homme ait jamais construit dans le monde est une tour de télévision sise près de Fargo, dans le Dakota du Nord. D'une distance au sol de 1,6 km, son angle d'élévation est de 21,3°. Déterminer sa hauteur au mètre près.

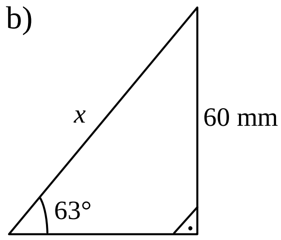
Exercice 17 **:** **La surface du Pentagone**
Le Pentagone est le plus grand bâtiment administratif au monde, si l'on considère la surface occupée. La base du bâtiment a la forme d'un pentagone régulier, dont chaque côté mesure 276 m. Déterminer l'aire de la base du bâtiment.

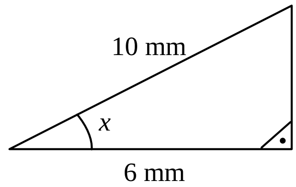
Exercice 18 : **Un octogone régulier**
Un octogone régulier est inscrit dans un cercle de rayon 12 centimètres. Calculer le périmètre de l'octogone.

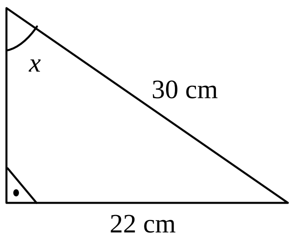
Exercices supplémentaires

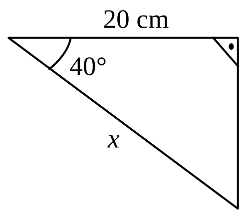
Exercice 19 :

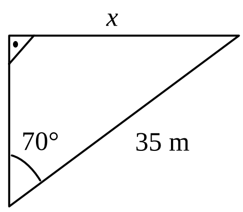
a)


b)


c)


d)


e)


f)


Exercice 20 :

Calculer l'aire du quadrilatère *ABCD* .

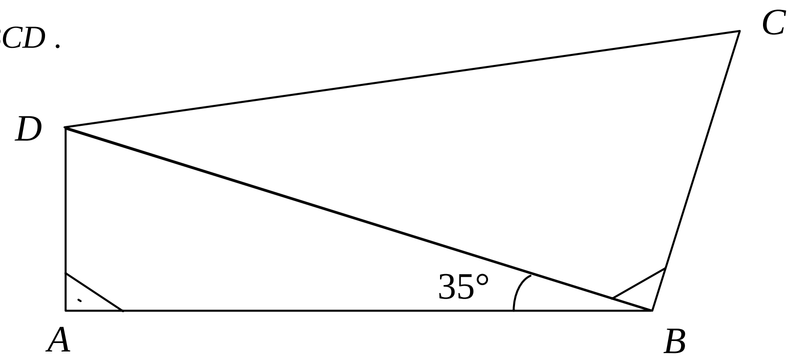
$\overline{AB} = 50\,\text{cm}$

$\overline{BC} = 60\,\text{cm}$

$\widehat{BAD} = 90°$

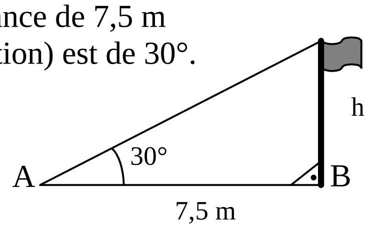
$\widehat{DBC} = 90°$

$\widehat{ABD} = 35°$



Exercice 21 : ***Calcul de la hauteur d'un mât***

Un géomètre observe en un point A, placé au niveau du sol à une distance de 7,5 m de la base B d'un mât, l'angle entre le sol et le sommet (angle d'élévation) est de 30°. Calculer la hauteur h du mât.



Exercice 22 : ***Hauteur d'un bâtiment***

A partir d'un point A situé 8,20 m au-dessus du sol, l'angle d'élévation du sommet d'un bâtiment est de 31° et l'angle de dépression de la base du bâtiment est de 12°. Calculer la hauteur du bâtiment.

Exercice 23 : ***Calculs d'échelles***

Une échelle de 6 m de long est appuyée contre la façade d'un bâtiment et l'angle entre l'échelle et le bâtiment est de 22°.

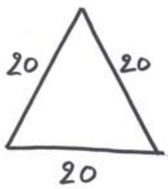
(a) Calculer la distance entre le pied de l'échelle et le mur.

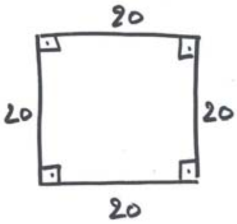
(b) Si la distance entre le pied de l'échelle et le mur augmente de 1 m, de combien le point d'appui de l'échelle contre le mur va-t-il descendre ?

Exercice 24 : *Vitesse d'un avion*
Un avion volant à une altitude de 3'000 m passe juste au-dessus d'un objet fixe au sol. Une minute plus tard, l'angle de dépression de l'objet est de 42°. Calculer la vitesse de l'avion à 1 km/h près.

Exercice 25* : ***Hauteur d'une montagne***
Un motocycliste roulant sur une autoroute en direction d'une montagne à une vitesse de 60 km/h remarque qu'entre 13h00 et 13h10, l'angle d'élévation du sommet de la montagne passe de 10° à 70°. Calculer la hauteur de la montagne.

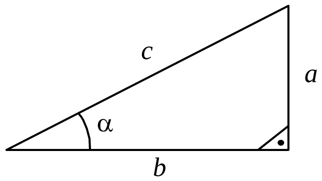
Exercice 26* : **Sans utiliser** les touches **SIN**, **COS** et **TAN** de la calculatrice, déterminer les valeurs suivantes :
sin(30°), cos(30°), tg(30°), sin(60°), cos(60°), tg(60°), sin(45°), cos(45°), tg(45°)





Indication : utiliser les figures ci-contre.

Exercice 27* :
En se basant sur le dessin ci-dessous, démontrer les trois propriétés suivantes :



$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$
$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$$
$$\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$$

Solutions :

Ex 1 :	*53,1°*	*66,4°*	*56,3°*	*23,6°*	*78,5°*	*36,9°*	*Ex 5 : 1) x=17,89 cm ; 2) x=65,4° ; 3) x=43,65 cm*
Ex 2 :	*4,0*	*5,4*	*13,9*	*16,0*	*9,1*	*4,6*	
Ex 3 :	*44°*	*0,695*	*0,719*	*0,966*			*4) x=47,8° ; 5) x=8,66 mm ; 6) x=32,4°*
	30°	*0,5*	*0,866*	*0,577*			*7) x=43,75 dm ; 8) x=34,5° ; 9) x=46,38 mm*
	60°	*0,866*	*0,5*	*1,732*			*Ex 6 : 15,32 dm^2 14,62 dm^2*
	45°	*0,707*	*0,707*	*1*			*Ex 7 : 51,42 cm^2 27,65 cm^2 20,98 cm^2*
Ex 4 :	*1) x=41,50 cm; 2) x=37,08 m; 3) x=67,56 mm*						*36,55 cm^2 64,28 cm^2 200 cm^2*
	4) x=37,2°; 5) x=54,3°; 6) x=39,5°						*237,85 cm^2 80,90 cm^2*

Ex 8 : 6581 m	*Ex 9 : 63,92 m*	*Ex 14 : 345,53 sec = 5 min et 46 sec*	
Ex 10 : 130,90 m	*Ex 11 : 6,06 m*	*Ex 15 : 12,02°*	*Ex 16 : 623,81 m*
Ex 12 : 8600 m (8638)	*Ex 13 : 2898 m*	*Ex 17 : 131'059 m^2*	*Ex 18 : 61,23 cm*

Ex 19 : a) x=13,86 cm ; b) x=67,34 mm ; c) x=53,13° ; d) x=47,17° ; e) x=26,11 cm ; f) x=32,89 m

Ex 20 : 2706,45 cm^2 *Ex 21 : 4,33 m* *Ex 22 : 31,38 m*

Ex 23 : a) 2,25 m b) 52 cm *Ex 24 : 55,53 m/s = env. 200 km/h* *Ex 25 : 1884,19 m*