

GM Pythagore

Objectifs :

- Être capable de poser l'égalité du théorème de Pythagore
- Être capable d'utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la mesure manquante d'un triangle rectangle
- Être capable d'utiliser le théorème de Pythagore pour prouver qu'un triangle est rectangle
- Être capable d'utiliser le théorème de Pythagore dans la résolution de problèmes

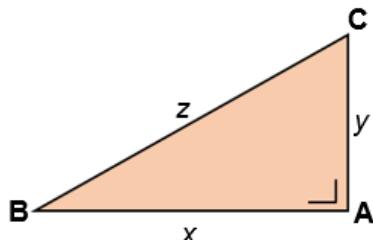
Pour commencer, prends connaissance des éléments théoriques concernant le théorème de Pythagore en page 173 à 175 de ton aide-mémoire.

Des compléments ainsi que des exercices te seront proposés tout au long des pages à venir. Les corrigés des exercices, parfois accompagnés d'explications vidéo, se trouvent à la fin du document (pages 6 à 10).

Formule

Théorème

Dans un triangle rectangle ABC, $\mathbf{AB^2 + AC^2 = BC^2}$



Cela signifie qu'en additionnant le carré du côté AB et le carré du côté AC, nous obtenons le carré du côté BC. Ce théorème est applicable uniquement dans un triangle rectangle.

Vocabulaire

Les côtés x et y de l'angle droit sont appelés « cathètes ».

Le côté z opposé à l'angle droit est appelé « hypoténuse ».

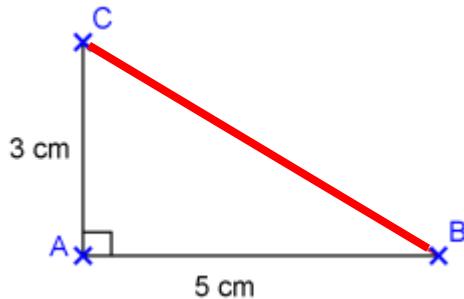
Nous pouvons faire 2 applications de ce théorème :

- Calculer la mesure manquante d'un côté du triangle rectangle.
- Vérifier si un triangle est rectangle, connaissant la mesure de ses 3 côtés. (réciproque)

Calcul d'un côté manquant

Le théorème de Pythagore permet, dans un triangle rectangle, de calculer la longueur du côté manquant si l'on connaît la mesure des 2 autres côtés.

Calcul de la longueur de l'hypoténuse :



Calculer BC.

En donner la valeur arrondie au mm.

ABC est un triangle rectangle en A, donc on utilise le théorème de Pythagore :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$5^2 + 3^2 = BC^2$$

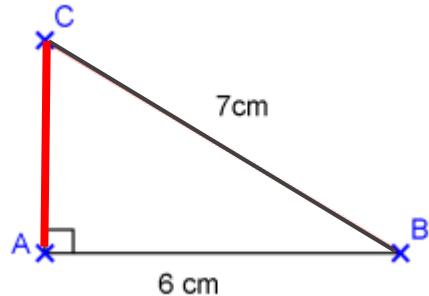
$$25 + 9 = BC^2$$

$$34 = BC^2$$

$$\sqrt{34} = BC$$

$$5,8 \text{ cm} \approx BC$$

Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit :



Calculer AC.

En donner la valeur arrondie au mm.

ABC est un triangle rectangle en A, donc on utilise le théorème de Pythagore :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$6^2 + AC^2 = 7^2$$

$$36 + AC^2 = 49$$

$$AC^2 = 49 - 36$$

$$AC^2 = 13$$

$$AC = \sqrt{13}$$

$$AC \approx 3,6 \text{ cm}$$

Il est aussi possible de retenir directement la formule pour l'un des côtés de l'angle droit :

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

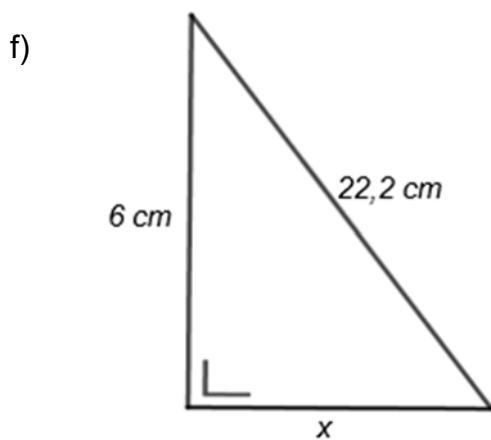
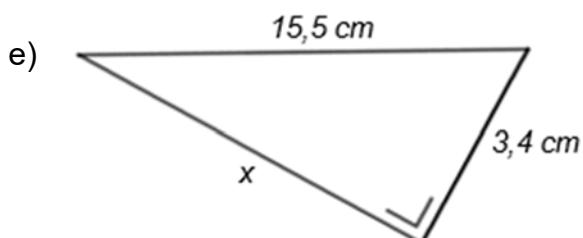
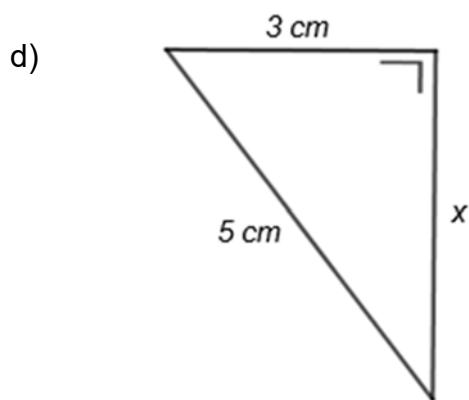
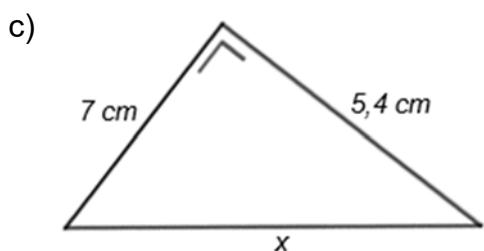
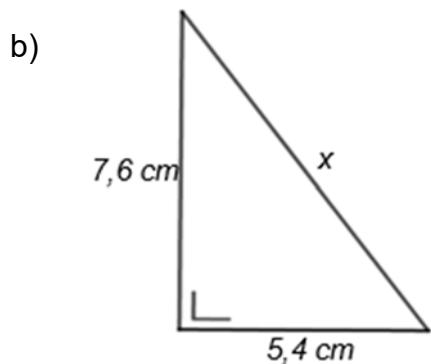
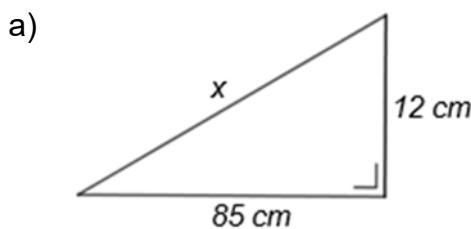
Explications vidéo, clique ici : <https://youtu.be/iUQJ9os2W9g>



Exercice 1 :

Calcule la longueur x dans chacun des triangles rectangles suivants :

Tu constateras dans le corrigé que les résultats finaux sont arrondis au dixième.



Preuve qu'un triangle est rectangle

Si, dans un triangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est un triangle rectangle.

Autrement dit, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A.

Lorsque l'on connaît les longueurs des trois côtés d'un triangle, on peut vérifier si c'est un triangle rectangle.

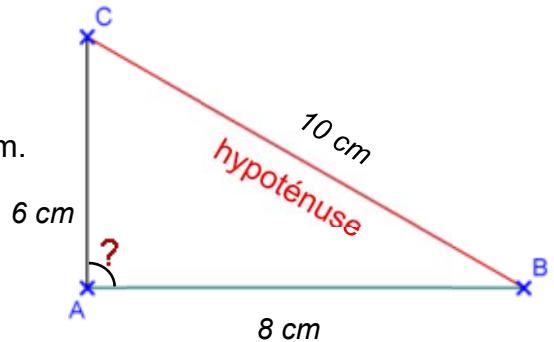
Exemple :

ABC est tel que $AB = 8 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$ et $BC = 10 \text{ cm}$.

ABC est-il un triangle rectangle ?

$$BC^2 = 100$$

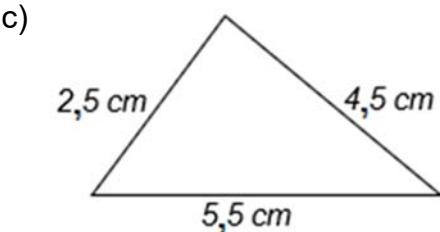
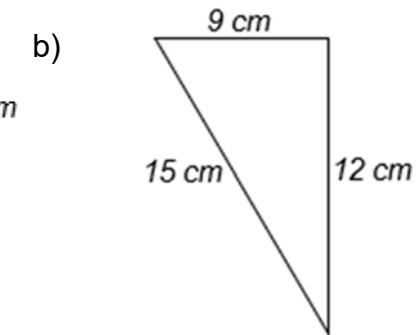
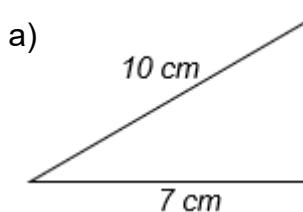
$$AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100$$



comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore.

Exercice 2 :

Les triangles ci-dessous sont-ils rectangles ?



Problèmes d'application

Exercice 3 :

GM62 Rendez-vous galant

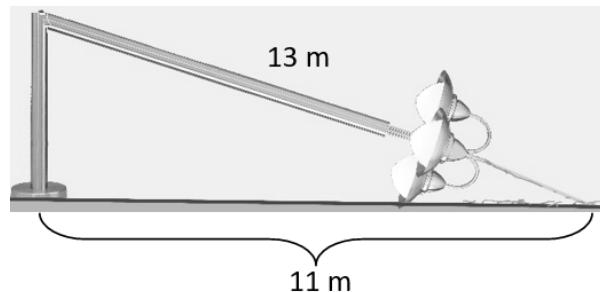
Marie-Christine veut rendre visite à son Roméo. Pour y parvenir, elle doit passer par la fenêtre de sa chambre, qui est située à 6 m au-dessus du sol. Marie-Christine positionne une échelle de telle manière que le haut de celle-ci arrive juste au bas de la fenêtre. Les pieds de l'échelle se retrouvent alors à une distance horizontale de 2 m du mur.

Quelle est la longueur de l'échelle ?

Exercice 4 :

Superman a raté son atterrissage ! Un lampadaire en a fait les frais.

Combien mesurait ce réverbère avant qu'il se soit fait plier par le super héros.



Exercice 5 :

La hauteur d'un trapèze rectangle mesure 24 cm. Sachant que les diagonales mesurent 26 cm et 51 cm, calcule son aire. Aide-toi d'un croquis.

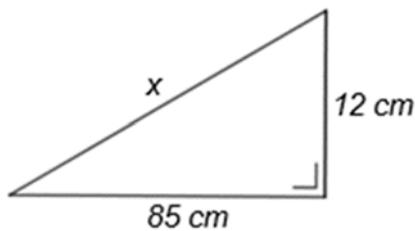
GM Pythagore – corrigés

Calcul d'un côté manquant

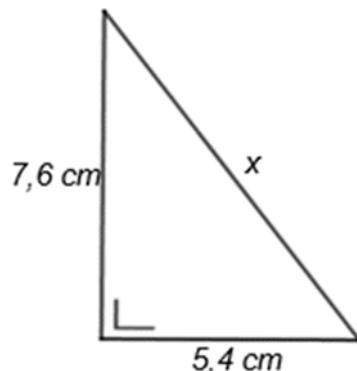
Exercice 1 :

Calcule la longueur x dans chacun des triangles rectangles suivants :

a)



b)



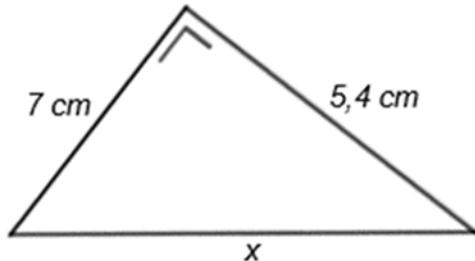
$$\begin{aligned} 12^2 + 85^2 &= x^2 \\ 144 + 7225 &= x^2 \\ 7369 &= x^2 \\ \sqrt{7369} &= x \\ 85,8 \text{ cm} &\approx x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5,4^2 + 7,6^2 &= x^2 \\ 29,16 + 57,76 &= x^2 \\ 86,92 &= x^2 \\ \sqrt{86,92} &= x \\ 9,3 \text{ cm} &\approx x \end{aligned}$$

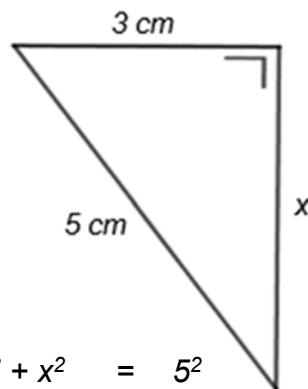
Explications vidéo, clique ici :
<https://youtu.be/lmJoFkNmmEA>



c)



d)

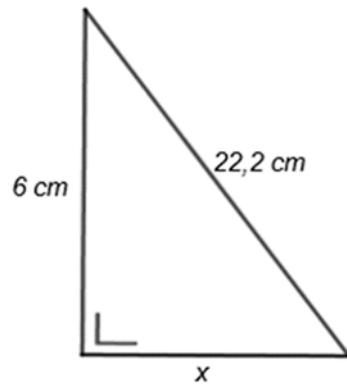
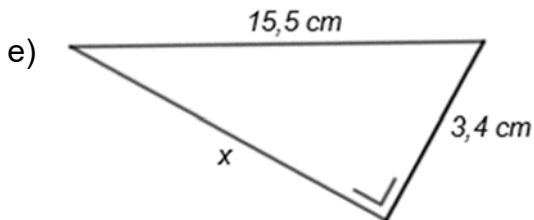


$$\begin{aligned} 7^2 + 5,4^2 &= x^2 \\ 49 + 29,16 &= x^2 \\ 78,16 &= x^2 \\ \sqrt{78,16} &= x \\ 8,8 \text{ cm} &\approx x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^2 + x^2 &= 5^2 \\ 9 + x^2 &= 25 \\ x^2 &= 25 - 9 = 16 \\ x &= \sqrt{16} = 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Explications vidéo, clique ici :
<https://youtu.be/t9fxKUwe8my>





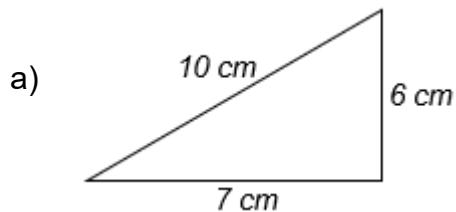
$$\begin{aligned}
 3,4^2 + x^2 &= 15,5^2 \\
 11,56 + x^2 &= 240,25 \\
 x^2 &= 228,69 \\
 x &= \sqrt{228,69} \approx 15,1 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6^2 + x^2 &= 22,2^2 \\
 36 + x^2 &= 492,84 \\
 x^2 &= 456,85 \\
 x &= \sqrt{456,85} \approx 21,4 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Preuve qu'un triangle est rectangle

Exercice 2 :

Les triangles ci-dessous sont-ils rectangles ?



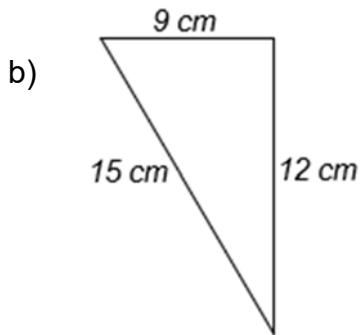
Le triangle est rectangle si : $6^2 + 7^2 = 10^2$

$$6^2 + 7^2 \stackrel{?}{=} 10^2$$

$$36 + 49 \stackrel{?}{=} 100$$

$$85 \neq 100$$

Comme $85 \neq 100$, alors le triangle n'est pas rectangle.



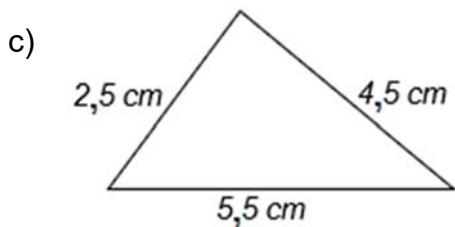
Le triangle est rectangle si : $9^2 + 12^2 = 15^2$

$$9^2 + 12^2 \stackrel{?}{=} 15^2$$

$$81 + 144 \stackrel{?}{=} 225$$

$$225 = 225$$

Comme $225 = 225$, alors le triangle est rectangle.



Le triangle est rectangle si : $2,5^2 + 4,5^2 = 5,5^2$

$$2,5^2 + 4,5^2 \stackrel{?}{=} 5,5^2$$

$$6,25 + 20,25 \stackrel{?}{=} 30,25$$

$$26,5 \neq 30,25$$

Comme $26,5 \neq 30,5$, alors le triangle n'est pas rectangle.

Problèmes d'application

Exercice 3 :

GM62 Rendez-vous galant

Marie-Christine veut rendre visite à son Roméo. Pour y parvenir, elle doit passer par la fenêtre de sa chambre, qui est située à 6 m au-dessus du sol. Marie-Christine positionne une échelle de telle manière que le haut de celle-ci arrive juste au bas de la fenêtre. Les pieds de l'échelle se retrouvent alors à une distance horizontale de 2 m du mur.

Quelle est la longueur de l'échelle ?

Le mur et le sol forment un angle droit. L'échelle est donc l'hypothénuse de ce triangle rectangle.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Pythagore :

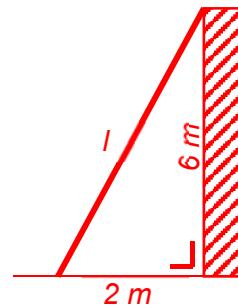
$$l^2 = 2^2 + 6^2$$

$$l^2 = 4 + 36$$

$$l^2 = 40$$

$$l = \sqrt{40} \cong 6,3 \text{ m}$$

L'échelle doit donc avoir une longueur d'au moins 6,3 mètres



Exercice 4 :

Superman a raté son atterrissage ! Un lampadaire en a fait les frais.

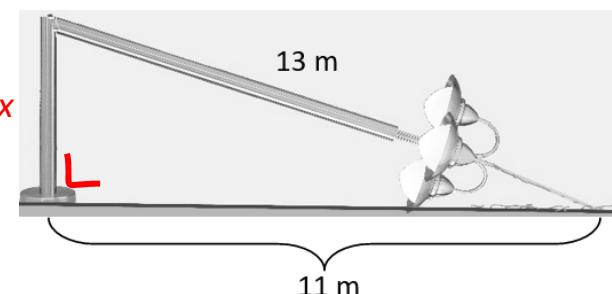
Combien mesurait ce réverbère avant qu'il se soit fait plier par le super héros.

Comme le triangle est rectangle :

$$x^2 + 11^2 = 13^2$$

$$x^2 = 169 - 121 = 48$$

$$\text{donc } x = \sqrt{48} \cong 6,9 \text{ m}$$



La hauteur du lampadaire était donc de $13 + 6,9 = 19,9 \text{ m}$

Explications vidéo, clique ici : <https://youtu.be/y9L1zTGxo6U>



Exercice 5 :

La hauteur d'un trapèze rectangle mesure 24 cm. Sachant que les diagonales mesurent 26 cm et 51 cm, calcule son aire. Aide-toi d'un croquis.

ABD et ABC sont rectangles
⇒ Pythagore

Δ ABC :

$$24^2 + BC^2 = 51^2$$

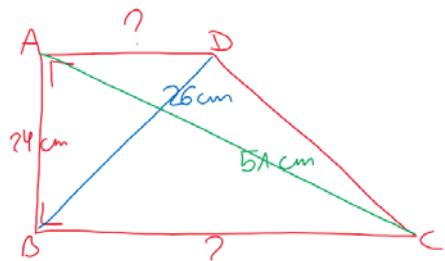
$$\text{Donc } BC = \sqrt{51^2 - 24^2} = \sqrt{2025} = 45 \text{ cm}$$

Δ ABD :

$$24^2 + AD^2 = 26^2$$

$$\text{Donc } AD = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

L'aire du trapèze est donc égale à $(45 + 10) : 2 \cdot 24 = 660 \text{ cm}^2$



Explications vidéo, clique ici : <https://youtu.be/EGPlI528IAE>

